الباب الأول

عزم الحركة الزاوي

Angular Moment

■ بعض علاقات التبادل الهامة ■ جبر المتجهات ■ مؤثرات عزم الحركـة الزاوي ■ القيم والدوال المميزة لمؤثرات عزم الحركة الـزاوي ■ مـؤثرات الرفع والخفض لعزم الحركة الزاوي ■ تمارين

لقد سبق وتعرضنا في الجزء الأول من هذا الكتاب إلـى عـزم الحركـة الزاوي وأثبتنا في عدة مواقع أن عزم الحركـة الـزاوي هـو كميـة مكمـاة Quantized. حيث تتحدد القيم المتاحة له، وكذلك مركبته في الاتجاه z على أساس قيم أرقام الكم ℓ, m وقد توصلنا إلى هذه النتائج بحل معادلة شرودنجر. وسوف نقدم في هذا الباب نظرية متكاملة لمؤثرات العـزوم الزاويـة تعكـس أهميتها ومكانها الراسخ كأساس لنظرية الكم. وسوف نبني هذه النظريـة علـى خواص التبادل Commutation لمؤثرات العزوم الزاوية وبالتالي فإننا يمكـن أن نستخلص الخواص المختلفة لأي مجموعة أخرى من المؤثرات لهـا نفـس خواص التبادل كمؤثرات العزوم الزاوية. وهذا هو أحد الأسباب التي تعلل الدور الحيوي للعزوم الزاوية في نظرية الكم.

إن تطبيقات نظرية العزوم الزاوية متعددة وسوف نتعرض لها في مواقف عديدة في هذا الجزء. فهي مثلا تلعب دورا رئيسيا في فهـم وشـرح التركيـب الذري (وقد تعرضنا للمحة عن ذلك عند دراسة ذرة الهيدروجين) كمـا إنهـا حيوية لدراسة الحركة الدورانية للجزيئات كما هو الحـال فـي جميـع فـروع الدراسات الطيفية Spectroscopic studies .

١-١ بعض علاقات التبادل الهامة

Some Commutation Relationships

لقد سبق وعرفنا المتبادل Commutator للمؤثرين $\hat{A}, \hat{B}$ بالعلاقة :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (١-١)$$

وفي حالة $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ فإن المتبادل $[\hat{A}, \hat{B}]$ يساوي الصفر. ويطلـق علـى المؤثران $\hat{A}, \hat{B}$ مؤثران متبادلان Commute . ولتـسهيل عمليـة حـساب

المتبادل للمؤثرات المختلفة فإننا سوف نقدم فيما يلي بعض العلاقات التي يمكـن إثبات صحتها بسهولة .

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=-\left[\hat{B},\hat{A}\right] \qquad (١ - ٢)$$

$$\left[\hat{A},\hat{A}^{n}\right]=٠ \qquad ; n=١,٢,٣,.......... \qquad (١ - ٣)$$

وإذا كان k مقدار ثابت فإن:

$$\left[k\hat{A},\hat{B}\right]=\left[\hat{A},k\hat{B}\right]=k\left[\hat{A},\hat{B}\right] \qquad (١ - ٤)$$

وإذا كان $\hat{A}\,,\hat{B}\,,\hat{C}$ هي ثلاث مؤثرات مختلفة فإن:

$$\left[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right] \qquad (١ - ٥)$$

$$\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{C}\right]+\left[\hat{B},\hat{C}\right] \qquad (١ - ٦)$$

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right] \qquad (١ - ٧)$$

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}+\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] \qquad (١ - ٨)$$

وفي جميع هذه العلاقات يجب أن تكون المؤثرات كلهـا خطيـة. والآن لعلنـا نستخدم هذه العلاقات لحساب بعض المتبادلات الهامة.

مثال ١-١:

احسب المتبادل للمؤثرين $\hat{p}_x$ و $\hat{x}$ وللمؤثرين $\hat{p}_x^{٢}$ و $\hat{x}$.

الحل :

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=\left[\hat{x},-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]=-i\hbar\left[\hat{x},\frac{d}{dx}\right]=+i\hbar$$

$$\left[\hat{x},p_x^{٢}\right]=[\hat{x},\hat{p}_x]\hat{p}_x+\hat{p}_x[\hat{x},\hat{p}_x]$$

حيث استخدمنا العلاقة (٧ - ١).

$$[\hat{x}\,,\hat{p}_x^{٢}] = (i\hbar)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)(i\hbar)$$

$$= \left(+\hbar^{٢}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(+\hbar^{٢}\frac{\partial}{\partial x}\right) = +٢\hbar^{٢}\frac{\partial}{\partial x}$$

مثال ١-٢:

احسب المتبادل للمؤثرين $\hat{H}\,,\hat{p}_x$ لنظام يتحرك في الأبعاد الفراغية الثلاث.

الحل :

المتبادل المطلوب هو $[\hat{P}_x\,,\hat{H}]$ ويمكن التعويض عن $\hat{H}$ بالتعبير:

$$[\hat{p}_x\,,\hat{H}] = [\hat{p}_x\,,\hat{T}+\hat{V}]$$

$$= [\hat{P}_x\,,\hat{T}] + [\hat{P}_x\,,\hat{V}]$$

$$= \frac{١}{٢m}\{[\hat{p}_x,\hat{p}_x^{٢}] + [\hat{p}_x,\hat{p}_y^{٢}] + [\hat{p}_x,\hat{p}_z^{٢}]\} + [\hat{p}_x,\hat{V}]$$

$$= [\hat{P}_x,\hat{V}] = \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x},\hat{V}\right]$$

$$= -i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}$$

مثال ١-٣ :

احسب المتبادل للمؤثرين $\hat{x}, \hat{H}$ لنظام يتحرك في الأبعاد الفراغية الثلاث تحت تأثير طاقة وضع $V = ٠$.

الحل :

المتبادل المطلوب هو $[\hat{x}, \hat{H}]$ ويمكن تحليل مؤثر الهملتـونين $\hat{H}$ باسـتخدام العلاقة :

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$

وعلى ذلك فإن المتبادل المطلوب هو :

$$[\hat{x}, \hat{H}] = [\hat{x}, \hat{T} + \hat{V}]$$

ويمكن استخدام العلاقة (١ - ٥) لحل هذا التعبير الأخير :

$$[\hat{x}, \hat{H}] = [\hat{x}, \hat{T}] + [\hat{x}, \hat{V}] = [\hat{x}, \hat{T}]$$

$$= \left[\hat{x}, \frac{١}{٢m}\left(\hat{p}_x^٢ + \hat{p}_y^٢ + \hat{p}_z^٢\right)\right]$$

$$= \frac{١}{٢m}\left\{\left(+ ٢\hbar^٢ \frac{\partial}{\partial x}\right) + ٠ + ٠\right\}$$

$$\therefore [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{\hbar^٢}{m}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{i\hbar}{m}\hat{P}_x$$

والأمثلة السابقة تقدم حقيقة في غاية من الأهمية وهي أن المتبادلات التـي تـم حسابها تعكس معنى فيزيـائي يجـدر الإشـارة إليـه. فحيـث إن المتبـادل $[\hat{x}, \hat{p}_x] \neq ٠$ فإننا لا يجب أن نتوقع أن تكون دالة الحالة Ψ داله مميزة لكـلا المؤثرين. وبالتالي فإننا لا يمكن أن نعين قيما محددة لكل من المكان x وعـزم الحركة P_x مما يتفق مع ما قدمناه من قبل في مبدأ عدم التأكد لهينزنبرج. وحيث إن المؤثران $\hat{H}$ و $\hat{x}$ لا يتبادلان فإننا لا يمكن أن نعين الطاقة والإحـداثي x

للنظام في نفس الوقت. وبالتالي فـإن الحـالات الثابتـة Stationary States (والتي تتمتع بطاقة ثابتة) تظهر انتشاراً على كل قيم x الممكنة وكل ما يمكن معرفته هنا هو الاحتمالية Ψ^2 عند أي نقطة x في الفراغ المتاح للنظام.

١-٢ جبر المتجهات

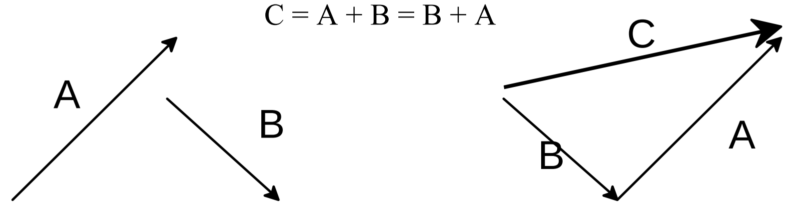
Vector Algebra

يتم التركيز في هذا الباب على العزوم الزاوية بـصورها المتعـددة والمختلفـة وحيث إن عزم الحركة الزاوي أيا كان مصدره هو كمية متجهة في الأسـاس، فإنه يجدر بنا أن نراجع سوياً بعض العلاقات الأساسية في جبر المتجهات التـي سوف نتعرض لها ونستخدمها لفهم خواص المؤثرات الزاوية التي سوف نتعامل معها في هذا الباب .

إن الخواص الفيزيائية التي يحتاج وصفها وصفا كاملا إلى قيمـة عدديـة بالإضافة إلى اتجاه، تسمى كمية متجهة vector quantity . ومثال على ذلـك السرعة، القوة وعزم الحركة. وتمثل المتجهات بسهم، يحدد طول هـذا الـسهم المقدار و اتجاهه هو اتجاه الخاصية.

ويمكن تعريف طريقة جمع متجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ كالآتي: أزح المتجه الأول بحيـث تلمس مؤخرته مقدمة المتجه الثاني مع احتفاظه بالاتجاه ثم ارسم متجها جديـدا من مؤخرة المتجه الثاني إلى مقدمة المتجه الأول كما هـو موضـح بالـشكل (١-١).

$$C = A + B = B + A$$



شكل (١-١): جمع المتجهين A و B

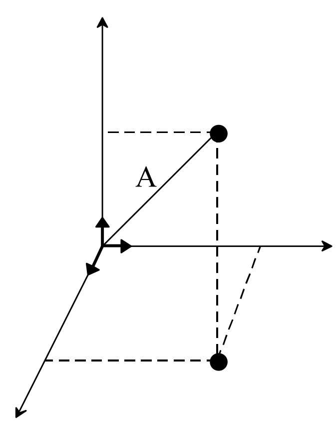
وإذا كان C هو مقدار ثابت فإن حاصل الضرب C<u>A</u> يمثل متجها جديدا له قيمة عددية تساوي |C| مرة قيمة A . ويكون له نفس اتجاه <u>A</u> إذا كان C موجب أو يكون له اتجاه معاكس لاتجاه <u>A</u> إذا كان C سالبا.

ولتمثيل المتجهات فراغيا فإننا نرسم محاور الإحداثيات الكرتيزية z , y, x ثم نرسم متجه وحدة الطول على المحور x ويطلق على هذا المتجه i ومتجـه وحدة الطول على المحور y ويطلق عليه j ، وأخيرا متجه وحدة الطول علـى المحور z ويطلق عليه k . ولتحليل المتجه <u>A</u> في الفراغ فإننا نزيح <u>A</u> بحيث تنطبق مؤخرته على نقطة الأصل بدون أن نغير اتجاهه ثم نوجد مسقط A على كل من المحاور z , y , x وليكن A_x , A_y, A_z على الترتيب وبالتالي فإن:

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad (١ - ٩)$$

ويتساوى المتجهان <u>A</u> , <u>B</u> في حالة ما إذا تساوت المركبات الثلاث لكل منهما أي إن :

$$A_z = B_z \quad , \quad A_y = B_y \quad , \quad A_x = B_x$$



شكل (١-٢) : متجهات الوحدة ومركبات المتجه A في الفراغ.

ومن أهم تطبيقات تحليل المتجهات هي عملية الجمع الجبري للمتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ حيث يمكن أن تتم بجمع المركبات المقابلة لها أي إن :

$$\underline{A} + \underline{B} = A_x\, i + A_y\, j + A_z\, k + B_x\, i + B_y\, j + B_z\, k$$
$$= (A_x + B_x)\, i + (A_y + B_y)\, j + (A_z + B_z)\, k$$

ويمكن تعريف حاصل ضرب المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ بالتعبير :

$$\underline{A}.\underline{B} = |A|\,|B| \cos\theta = \underline{B}.\underline{A} \qquad (١ - ١٠)$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين ويطلق على هذه العملية عملية **حاصل الضرب غير المتجه** dot product or scalar product ونتيجتها هو قيمة عددية غير متجهة scalar. ولاحظ هنا في التعبير (١٠ - ١) أن $|A| \cos\theta$ يمثل مسقط A على B وبالتالي فإن مسقط المتجه (A + B) على المتجه C ما هو إلا مجموع مسقط A ومسقط B على C أي إن :

$$(A + B) . C = A . C + B . C \qquad (١ - ١١)$$

وحيث ان المتجهات الثلاث i , j , k الممثلة لوحدة الطول كلها متعامدة فإن :

$$i . i = j . j = k . k = \cos (٠) = ١ \qquad (١ - ١٢a)$$

$$i . j = j . k = k . i = \cos \left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٠ \qquad (١ - ١٢b)$$

ويمكن تعريف حاصل ضرب المتجهين $\underline{A}$, $\underline{B}$ في صورة مركباتها كالآتي :

$$\underline{A} . \underline{B} = (A_x\, i + A_y\, j + A_z\, k) . (B_x\, i + B_y\, j + B_z\, k)$$

وباستخدام العلاقات (١٢ - ١) فإن :

$$\underline{A} . \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (١ - ١٣)$$

وبنفس الطريقة يمكن تعريف حاصل ضرب متجه مع نفسه :

$$\underline{A}.\underline{A} = |A|^{٢} \quad (١ - ١٤)$$

وبالتالي فإن :

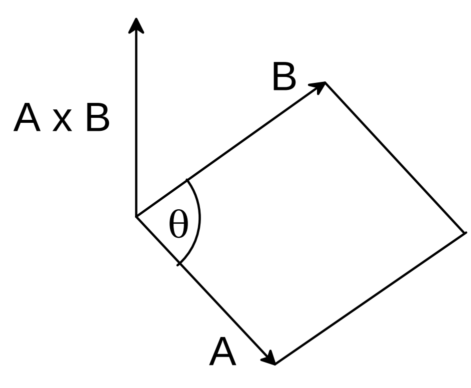
$$|A| = \left(A_x^{٢} + A_y^{٢} + A_z^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \quad (١ - ١٥)$$

وهناك نوع آخـر مـن حاصـل الـضرب هـو **حاصـل الـضرب المتجـه** cross product or vector product ويمكن تعريفه كالآتي :

$$|A \times B| = |A|\ |B| \sin\theta \quad (١ - ١٦)$$

ويوضح الشكل (١-٣) اتجاه المتجه الجديد $A \times B$ حيث يكون متعامـداً على المستوى المحدد بالمتجهين A و B ويكون اتجاهه بحيـث إن A وB و$A \times B$ يكونوا نظام اليد اليمنى تمامـا كالمحـاور x , y , z ومـن هـذا التعريف فإن :

$$A \times B = -B \times A \quad (١ - ١٧)$$



شكل (١-٣) : حاصل ضرب المتجه A x B عمودي على المستوى المحدد بالمتجهين A وB

وبالنسبة لوحدة طول المتجه في الاتجاهات الـثلاث فإننـا يمكـن أن نـستنبط العلاقات التالية :

$$i\times i = j\times j = k\times k = \sin(٠) = ٠ \qquad (١-١٨)$$

$$i\times j = k \quad ; \quad j\times i = -k \qquad (١-١٩a)$$

$$j\times k = i \quad ; \quad k\times j = -i \qquad (١-١٩b)$$

$$k\times i = j \quad ; \quad i\times k = -j \qquad (١-١٩c)$$

وعند تمثيل المتجهين $\underline{B}$, $\underline{A}$ في صورة مركباتهما فإن حاصل الضرب المتجه يمكن كتابته كالآتي :

$$\begin{aligned} A\times B &= (A_x i + A_y j + A_z k)\times(B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k \qquad (١-٢٠) \end{aligned}$$

ويمكن كتابة حاصل الضرب في صورة أكثر سهولة كالآتي :

$$AxB = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \qquad (١-٢١)$$

وأخيراً افترض أن مركبات المتجه $\underline{A}$ تعتمد على متغيرها وليكن t أي أن :

$$A_x = A_x(t) \quad , A_y = A_y(t) , A_z = A_z(t) \qquad (١-٢٢)$$

وبالتالي فإن معدل تغير المتجه A بالنسبة للمتغير t يصبح كالآتي:

$$\frac{dA}{dt} = i\frac{d A_x}{dt} + j\frac{d A_y}{dt} + k\frac{d A_z}{dt} \qquad (١-٢٣)$$

١-٣ مؤثرات عزم الحركة الزاوي

Angular Momentum Operators

لعلنا نبدأ هذا الفصل بموجز سريع لميكانيكا عزم الحركة من وجهة النظر الكلاسيكية. افترض جسيم كتلته m ولنفترض أن $\underline{r}$ هو المتجه من نقطة أصل الإحداثيات إلى المكان اللحظي للجسيم أي أن :

$$\underline{r} = i\,x + j\,y + k\,z \qquad (١ - ٢٤)$$

حيث z , y, x هي الإحداثيات اللحظية للجسيم وبالطبع فإن قيمة هذه الإحداثيات تتغير مع الزمن. وبالتالي فإننا يمكن أن نعرف متجه السرعة V على أنه معدل تغير r بالزمن أي أن :

$$v = \frac{dr}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} \qquad (١ - ٢٥)$$

أي أن مركبات السرعة هي :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (١ - ٢٦)$$

يمكن تعريف عزم الحركة الخطي للجسيم على أنه : $p = mv$

أو $P_x = mv_x \quad ; \quad P_y = mv_y \quad ; \quad P_z = mv_z$

أما عزم الحركة الزاوي للجسيم فيمكن تعريفه بالتعبير :

$$L = r \times p$$

وبصورة أخرى فإن :

$$L = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \qquad (١ - ٢٧)$$

وبالتالي فإن مركبات عزم الحركة الزاوي هي :

$$L_x = yP_z - zP_y \quad ; \quad L_y = zP_x - xP_z \quad ; \quad L_z = xP_y - yP_x \qquad (١ - ٢٨)$$

حيث يأخذ المتجه L اتجاها عموديا على المستوى المحدد بالمتجـه r وقيمـة السرعة v (الشكل ١-٣).

ولننتقل الآن إلى المعالجة الكمة لعزم الحركة. وطبقا لميكانيكا الكـم فـإن هناك نوعين من العزوم الزاوية. أولها عزم الحركة الزاوي المداري orbital angular momentum والناشئ من حركة الجسيم في الفراغ، وهـو يمثـل النظير الكمي للكمية الكلاسيكية L. والنوع الثاني هو العزم الـزاوي المغزلـي Spin angular momentum وهــو خاصــية لــصيقة بالجــسيمات الميكروسكوبية فقط وليس لها نظير كلاسيكي أي أن هذا النـوع مـن العـزوم الزاوية هو عزم كمي فقط.

ولنبدأ أولا بعزم الحركة الزاوي وحتى يمكن أن نحصل علـى المـؤثرات الكمة لمركبات عزم الحركة الزاوي لجسيم ما، فإن كل ما علينا هو التعـويض في التعبير (٢٨ - ١) بالمؤثرات المقابلة لكـل مـن P_x , P_y , P_z وبالتـالي نحصل على :

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (١ - ٢٩)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (١ - ٣٠)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (١ - ٣١)$$

وبالمثل فإن :

$$\hat{L}^{2} = \left|\hat{L}^{2}\right| = \hat{L}.\hat{L} = \hat{L}_x^{2} + \hat{L}_y^{2} + \hat{L}_z^{2} \qquad (١ - ٣٢)$$

والآن نبدأ في تعيين علاقات التبادل بين مؤثرات عـزوم الحركـات الزاويـة المختلفة آخذين في الاعتبار الدور الحيوي الهام الذي تلعبه مثل هذه العلاقـات

حيث تحدد الخواص التي يمكن تحديـد قـيم مطلقـة لهـا. ولنفتـرض دالـة $f(x, y, z)$ وكل المطلوب أن تكـون حـسنة الـسلوك well - behaved ولنحاول أولا أن نعين المتبادل $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$.

$$\hat{L}_y f = -i\hbar\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad (١ - ٣٣)$$

ولنعامل هذه المعادلة الأخيرة من اليسار بالمؤثر $\hat{L}_x$

$$\hat{L}_x\hat{L}_y f = -\hbar^{٢}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= -\hbar^{٢}\left[y\frac{\partial f}{\partial x} + yz\frac{\partial^{٢} f}{\partial z\partial x} - yx\frac{\partial^{٢} f}{\partial z^{٢}} - z^{٢}\frac{\partial^{٢} f}{\partial y\partial x} + zx\frac{\partial^{٢} f}{\partial y\partial z}\right] \quad (١-٣٤)$$

وبالمثل إذا ابتدأنا بالمؤثر $\hat{L}_x$ فإن :

$$\hat{L}_x f = -i\hbar\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad (١-٣٥)$$

$$\hat{L}_y\hat{L}_x f = -\hbar^{٢}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -\hbar^{٢}\left[zy\frac{\partial^{٢} f}{\partial x\partial z} - z^{٢}\frac{\partial^{٢} f}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^{٢} f}{\partial z^{٢}} + x\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial^{٢} f}{\partial z\partial y}\right] \quad (١-٣٦)$$

وبطرح المعادلتين (٣٥ - ١) و (٣٦ - ١) نحصل على المتبادل $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right]$

$$\hat{L}_x\hat{L}_y f - \hat{L}_y\hat{L}_x f = -\hbar^{٢}\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z \quad (١-٣٧)$$

ويمكننا اتباع نفس الطريقة لتعيين المتبـادلات $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right]$, $\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right]$ ولكـن يمكننا وبنظرة فاحصة للعلاقات السابقة تـوفير الكثيـر مـن الوقـت والجهـد

والوصول إلى النتيجة المطلوبة بطريقة أيسر. فلعلنا لاحظنا التماثل الموجود في العلاقات من (٢٩ - ١) إلى (٣١ - ١) حيث تتم عملية يطلق عليهـا التبـادل الدوري cyclic permutation. والتبـادل الـدوري للإحـداثيات x , y , z يعني إحلال y بدلا من x و z بدلا من y و x بدلا من z وعلى ذلك لـو أجرينا تبادلا دوريا في التعبير $\hat{L}_x$ فإننا نحصل على $\hat{L}_y$ وبالتبادل الـدوري للتعبير $\hat{L}_y$ نحصل على $\hat{L}_z$ ومن $\hat{L}_z$ يمكن أن نحصل على $\hat{L}_x$ بالتبـادل الدوري للإحداثيات. وعلى ذلك فلو أجرينا تبادل دائري للإحداثيات في التعبيـر (٣٧ - ١)

فإننا يمكن أن نصل إلى النتيجة :

$$\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar\, \hat{L}_x \qquad (١ - ٣٨)$$

ومنها يمكن الحصول على :

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar\, \hat{L}_y \qquad (١ - ٣٩)$$

والآن وبعد أن نجحنا في الحصول على علاقات التبادل بـين مركبـات عـزم الحركة الزاوي المختلفة فلنحاول الآن أن نوجد علاقات التبادل بين $\hat{L}^٢$ وكل من المركبات الثلاث ولنبدأ بالمركبة $\hat{L}_x$ مثلا :

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}^٢, \hat{L}_x\right] &= \left[\hat{L}_x^٢ + \hat{L}_y^٢ + \hat{L}_z^٢, \hat{L}_x\right] \\ &= \left[\hat{L}_x^٢, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y^٢, \hat{L}_x\right] + \left[L_z^٢, \hat{L}_x\right] \\ &= \left[\hat{L}_y^٢, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z^٢, \hat{L}_x\right]\end{aligned}$$

حيث استخدمنا العلاقة (٣ - ١) . والآن وبتطبيق العلاقة (٨ - ١) فإن :

$$\left[\hat{L}^{٢}, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right]\hat{L}_y + \hat{L}_y\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right]\hat{L}_z + \hat{L}_z\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right]$$
$$= -i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y - i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z + i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z + i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y$$
$$\left[\hat{L}^{٢}, \hat{L}_x\right] = ٠ \qquad (١-٤٠)$$

وبالمثل :

$$\left[\hat{L}^{٢}, \hat{L}_y\right] = ٠ \quad ; \quad \left[\hat{L}^{٢}, \hat{L}_z\right] = ٠ \qquad (١-٤١)$$

والآن فلنحاول الإجابة على السؤال الذي طرحناه في بداية هذا الفصل وهو لأي من هذه الكميات يمكننا تحديد قيم مطلقة ؟ وهل يمكن تعيين متزامن لمثل هذه القيم لأكثر من خاصية واحدة ؟ والعلاقات التي أثبتناها تدل على أن $\hat{L}^{٢}$ يتبادل مع كل المركبات $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ وبالتالي فإننا يمكن أن نعين قيمة مطلقة محددة لمربع عزم الحركة الزاوي $L^{٢}$ وأي واحدة من المركبات الثلاث. ويمكن أيضا تعيين قيمة مطلقة ومحددة لها ولكن وحيث أن الثلاث مركبات لا تتبادل مع بعضها البعض فإنه لا يمكن التعيين المتزامن للقيم المحددة والمطلقة لها جميعا ولا يمكن أن نميز ونحدد إلا مركبة واحدة فقط في أي لحظة زمنية. ومن المتعارف عليه أن نأخذ المركبة L_z كمركبة عزم الحركة الزاوي التي تحدد مع $L^{٢}$. لاحظ الفرق الأساسي هنا بين الميكانيكا الكلاسيكية وميكانيكا الكم ففي الحالة الأولى عند تعيين عزم الحركة الزاوي فإن مركباته الثلاث تعين تعيينا متزامنا وبدقة تامة. أما في ميكانيكا الكم فيتعين عزم الحركة الزاوي بتعيين قيمته العددية فقط (وليس اتجاهه) وتحديد واحدة فقط من مركباته.

٤-١ القيم والدوال المميزة لمؤثرات عزم الحركة الزاوي

Eigen values and Eigen functions of angular momentum operators

يمكننا بالطبع أن نبدأ مباشرةً في محاولة إيجاد القيم والدوال المميزة للمـؤثرات الكمة لعزم الحركة $\hat{L}^{2},\hat{L}_{z}$ باستخدام التعبيرين (٣١ - ١) و(٣٢ - ١) ولكن يلاحظ أن هذين التعبيرين يمثلان المؤثرين في فراغ الإحداثيات الكرتيزية. ولنا ملحوظتان في هذا المقام. أولهما أن اختيار فراغ الإحداثيات لتمثيل أي مؤثر أو متغير لابد وأن يؤدي إلى وصف الحركة المصاحبة بصورة أكثر وضوحا وهو ما لا يتحقق في حالتنا هذه حيث إن الحركة المصاحبة هـي حركـة زاويـة أو دورانية والإحداثيات الكرتيزية غير مؤهلة لتيسير وصف مثل هذه الحركة. ثـم كما هو واضح من التعبيرين (٣١ - ١) و(٣٢ - ١) فإن العلاقـات التفاضـلية الثلاث x, y, z لا يمكن فصلها وبالتالي فإن الطريقة المتبعة في حل مثل هـذه المعادلات التفاضلية (طريقة فصل المتغيرات) لا يمكن تطبيقهـا. ومـن هـذه المناقشة السابقة نصل إلى الاستنتاج أنه يجب تمثيل المـؤثرات $\hat{L}^{2},\hat{L}_{z}$ فـي فراغ إحداثيات أخرى وليكن فراغ الإحداثيات الكروية القطبية، وهـي الأكثـر ملاءمة للحركة الدورانية (الشكل ١-٤). وعملية التحويل هذه مع أنها عمليـة مباشرة إلا أنها تشمل العديد من العمليات الرياضية التي لاتهمنا هنا في المقـام الأول، وسوف نقدم فيما يلي صورة المؤثرين $\hat{L}^{2},\hat{L}_{z}$ في فراغ الإحـداثيات القطبية الكروية مباشرة، والقارئ المهتم بالتفاصيل الرياضية عليه مراجعة ملحق (١). وفي نظام الإحداثيات القطبية الكروية (r , θ , ϕ) فـإن مـؤثرات عـزم الحركة الزاوي يمكن التعبير عنها بالصور:

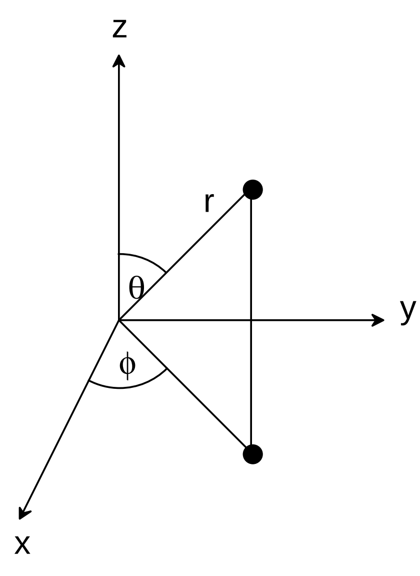
$$\hat{L}_{x} = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (١ - ٤٢)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (١ - ٤٣)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (١ - ٤٤)$$

وبتربيع كل من (٤٢ - ١) - (٤٤ - ١) وجمعها فإنه يمكننا الحصول على $\hat{L}^٢$ حيث يأخذ الصورة :

$$\hat{L}^٢ = -\hbar^٢\left(\frac{\partial^٢}{\partial\theta^٢} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{١}{\sin^٢\theta}\frac{\partial^٢}{\partial\phi^٢}\right) \qquad (١ - ٤٥)$$



شكل (١-٤) : نظام الإحداثيات الكروية القطبية.

ويلاحظ أن التعبيرات (٤٢ - ١) - (٤٥ - ١) توضح اعتماد مؤثرات عزم الحركة الزاوي على متغيرين اثنين فقط هما θ و ϕ مما يبسط الحلول الرياضية في هذا الفراغ في حين أن تلك المؤثرات كانت في ثلاث متغيرات في حالة الفراغ الكرتيزي (z , y , x).

والآن لعلنا نحاول إيجاد الدوال المميزة المشتركة للمؤثرين الكميين $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ ولنرمز لهذه الدوال بالرمز العام Y وحيث إن المؤثرين $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ يعتمدان على المتغيرين θ و ϕ فقط فإن الدوال Y تعتمد بالتالي على هذين المتغيرين أي $Y(\theta, \phi)$. والمعادلة المراد حلها للقيم والدوال المميزة هي:

$$\hat{L}_z Y(\theta,\phi) = b\, Y(\theta,\phi) \qquad (١ - ٤٦)$$

$$\hat{L}^2 Y(\theta,\phi) = c\, Y(\theta,\phi) \qquad (١ - ٤٧)$$

حيث b و c هما القيم المميزة لكل من $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ على الترتيب ولنبدأ أولا بالمعادلة (٤٦ - ١) ونعوض عن قيمة $\hat{L}_z$ بالتعبير (٤٤ - ١) :

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} Y(\theta,\phi) = bY(\theta,\phi) \qquad (١ - ٤٨)$$

وحيث إن $\hat{L}_z$ لا يعتمد على θ فلنحاول فصل المتغيرات والبحث عن دالة لها الصورة العامة :

$$Y(\theta,\phi) = S(\theta)T(\phi) \qquad (١ - ٤٩)$$

وبالتعويض في (٤٨ - ١) عن $Y(\theta,\phi)$ فإن :

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}[S(\theta)T(\phi)] = b\, S(\theta)T(\phi)$$

$$-i\hbar\, S(\theta) \frac{dT}{d\phi} = b\, S(\theta)T(\phi)$$

$$\frac{dT(\phi)}{T(\phi)} = \frac{ib}{\hbar} d\phi$$

$$T(\phi) = A\, e^{ib\phi/\hbar} \qquad (١ - ٥٠)$$

حيث A مقدار ثابت.

والآن نتساءل ما هي الشروط المفروضة على $T(\phi)$ حتى تكون داله مقبولة ؟ وللإجابة هذا السؤال لابد وأن نتذكر أن ϕ هي زاوية الدوران حول المحور x

وكل دوره بمقدار 2π تعيدنا إلى نفس النقطة مرة أخرى. أي أن لكـل قـيم ϕ فإنه لابد أن يتحقق الشرط الآتي لكي تكون الدالة أحادية القيمة:

$$T(\phi) = T(\phi + ٢\pi) \qquad (١-٥١)$$

$$Ae^{ib\phi/\hbar} = Ae^{ib(\phi+٢\pi)/\hbar}$$

أي إن المطلوب هو:

$$e^{ib٢\pi/\hbar} = ١ \qquad (١-٥٢)$$

ولكي نوجد قيم b التي تحقق هذا الشرط هيا بنا نكتب الدالة في صورة :

$$e^{ib٢\pi/\hbar} = \cos\frac{٢\pi b}{\hbar} + i\sin\frac{٢\pi b}{\hbar} = ١ \qquad (١-٥٣)$$

وحتى يتحقق الشرط (٥٢ - ١) لابد وأن يتلاشى الحد الثاني في (٥٣ - ١) لكل قيم (b) وأن يكون الحد الأول مساوياً للواحد الصحيح لكل قـيم (b) وهـذا يتحقق في حالة ما إذا كان :

$$b/\hbar = m \qquad ; \quad m = ٠, \pm ١, \pm ٢, ... \qquad (١-٥٤)$$

أي أن :

$$b = m\hbar \qquad ; \quad m = ٠, \pm ١, \pm ٢, ... \qquad (١-٥٥)$$

وبذلك يمكننا كتابة الدالة $T(\phi)$ بالصورة :

$$T(\phi) = Ae^{im\phi} \qquad ; \quad m = ٠, \pm ١, \pm ٢, ... \qquad (١-٥٦)$$

وحتى يتم تعريف الدالة $T(\phi)$ تعريفاً تاماً فإنه يلزم تعيين قيمة الثابت A وهذا هو مجال المثال التالي :

مثال ١-٤ :

أوجد قيمة الثابت A للدالة (٥٦ - ١)

الحل :

الثابت A هو ثابت معايرة ولإيجاده يجب تحقيق شرط المعايرة :

$$\int_{\text{all space}} \Psi^* \Psi \, d\tau = ١$$

وبالتعويض عن T^* و T فإن :

$$|A|^٢ \int_٠^{٢\pi} e^{-im\phi} . e^{im\phi} d\phi = ١$$

$$|A|^٢ \int_٠^{٢\pi} d\phi = ١$$

$$|A|^٢ [\phi]_٠^{٢\pi} = ١$$

$$|A|^٢ [٢\pi - ٠] = ١$$

$$A = \frac{١}{\sqrt{٢\pi}}$$

وعلى ذلك فإن الصورة النهائية للدالة $T(\phi)$ هي :

$$T(\phi) = \frac{١}{\sqrt{٢\pi}} e^{im\phi} \quad ; \; m = ٠, \pm ١, \pm ٢, ... \qquad (١ - ٥٧)$$

والآن فلنحاول حل المعادلة (٤٧ - ١) للقيم المميزة للمؤثر $\hat{L}^{٢}$ ولهذا الغـرض فلنعوض في (٤٧ - ١) بالمعادلات (٤٥ - ١), (٤٩ - ١), (٥٧ - ١) :

$$-\hbar^{٢}\left(\frac{\partial^{٢}}{\partial\theta^{٢}}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{١}{\sin^{٢}\theta}\frac{\partial^{٢}}{\partial\phi^{٢}}\right)\left(S(\theta)\frac{١}{\sqrt{٢\pi}}e^{im\phi}\right)=cS(\theta)\frac{١}{\sqrt{٢\pi}}e^{im\phi} \quad (١-٥٨)$$

$$\frac{d^{٢}S}{d\theta^{٢}}+\cot\theta\frac{dS}{\partial\theta}-\frac{m^{٢}}{\sin^{٢}\theta}S=-\frac{c}{\hbar^{٢}}S \qquad (١-٥٩)$$

ولحل هذه المعادلة الأخيرة للقيم المختلفة للدوال المميزة S وللقيم المميزة c فإننا سوف نجري بعض العمليات الجبرية المطولة نبدأها بتبديل المتغير المستقل θ بإدخال التعديل الآتي :

$$\omega=\cos\theta \qquad (١-٦٠a)$$

وبالتالي فإننا نستبدل (θ) S بدالة أخرى (ω) G حيث :

$$S(\theta)=G(\omega) \qquad (١-٦٠b)$$

وبتطبيق قاعدة التسلسل في التفاضل chain rule فإننا نحصل على التعبيـرات الآتية :

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{dG}{d\omega}\frac{d\omega}{d\theta}=-\sin\theta\frac{dG}{d\omega}=-\left(١-\omega^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}\frac{dG}{d\omega} \qquad (١-٦١a)$$

ولحساب $\frac{d^{٢}S}{d\theta^{٢}}$ نستخدم بعض خواص جبر المؤثرات .

$$\frac{d}{d\theta} = -\left(١-\omega^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \frac{d}{d\omega}$$

$$\frac{d^{٢}}{d\theta^{٢}} = \left(١-\omega^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \frac{d}{d\omega}\left(١-\omega^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \frac{d}{d\omega}$$

$$= \left(١-\omega^{٢}\right)\frac{d^{٢}}{d\omega^{٢}} + \left(١-\omega^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}\left(\frac{١}{٢}\right)\left(١-\omega^{٢}\right)^{-\frac{١}{٢}}\left(-٢\omega\right)\frac{d}{d\omega}$$

$$\therefore \frac{d^{٢}S}{d\theta^{٢}} = \left(١-\omega^{٢}\right)\frac{d^{٢}G}{d\omega^{٢}} - \omega\frac{dG}{d\omega} \qquad (١ - ٦١b)$$

وباستخدام العلاقات (٦٠ - ١) و (٦١ - ١) والتعويض بقيمة $\cot\theta$:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\omega}{\left(١-\omega^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}}$$

في المعادلة (٥٩ - ١) فإننا نحصل على التعبير :

$$\left(١-\omega^{٢}\right)\frac{d^{٢}G}{d\omega^{٢}} - ٢\omega\frac{dG}{d\omega} + \left[\frac{C}{\hbar^{٢}} - \frac{m^{٢}}{\left(١-\omega^{٢}\right)}\right]G(\omega) = ٠ \qquad (١ - ٦٢)$$

حيث يتأرجح مجال المتغير ω كالآتي : $-١ \leq \omega \leq 1$

ونحاول الآن حل المعادلة (٦٢ - ١) بافتراض صورة عامة للدالة $G(\omega)$ ولتكن :

$$G(\omega) = \left(١-\omega^{٢}\right)^{m/٢} H(\omega) \qquad (١ - ٦٣)$$

حيث $H(\omega)$ هي سلسلة power series سيتم تعريفها فيما بعد. ولعلنا نحاول أن نفاضل(٦٣ - ١) لنحصل علـى $G^{\backslash}$ و$G^{\backslash\backslash}$. وبـالتعويض فـي (٦٢ - ١) نحصل بعد القسمة $(١-\omega^{٢})^{m/٢}$ على

$$(١-\omega^{٢})H^{\backslash\backslash} - ٢(|m|+١)\omega H^{\backslash} + \left[Ch^{-٢} - |m|(|m|+١)\right]H = ٠ \qquad (١\text{-}٦٤)$$

ولنجرب الصورة التالية للسلسلة H

$$H(\omega) = \sum_{j=٠}^{\infty} a_j \omega^j \qquad (١ - ٦٥)$$

وبتفاضل (٦٥ - ١) نحصل على :

$$H^{\backslash}(\omega) = \sum_{j=٠}^{\infty} j\, a_j \omega^{j-١}$$

$$H^{\backslash\backslash}(\omega) = \sum_{j=٠}^{\infty} j\,(j-١) a_j \omega^{j-٢} = \sum_{j=٠}^{\infty} (j+٢)(j+١) a_{j+٢} \omega^j$$

وبالتعويض في (٦٤ - ١) وتجميع الحدود نحصل على :

$$\sum_{j=٠}^{\infty}\left[(j+٢)(j+١)a_{j+٢} + \left(-j^{٢} - j - ٢|m|j + \frac{C}{\hbar^{٢}} - |m|^{٢} - |m|\right)a_j\right]\omega^j = ٠$$

ومساواة معامل ω^j في هذه المعادلة الأخيرة بالصفر فإننا نحصل على التعبير:

$$a_{j+٢} = \frac{\left[(j+|m|)(j+|m|+١) - c/\hbar^{٢}\right]a_j}{(j+١)(j+٢)} \qquad (١ - ٦٦)$$

ويمكن إثبات أن هذه السلسلة اللانهائية الممثلة في التعبيـر (٦٦ - ١) لا تـؤدي إلى حصولنا على دوال حسنة السلوك. وعلى ذلك فإننا لابـد وأن نكـسر هـذه السلسلة عند أحد حدودها. وإذا أبقينا على حدها الأخير $a_k w^k$ فإننا يمكـن أن نتخاص من بقية السلسلة بوضع a_o أو a_1 (اعتماداً على كون k فرديا أو زوجيا) مساوياً للصفر. وعلى ذلك بالتعويض عن معامل a_k فـي (٦٦ - ١) مـساويا للصفر فإننا نحصل على التعبير :

$$C = \hbar^2 (k + |m|)(k + |m| + 1) \quad ; \quad k = 0,1,2,.... \qquad (67 - 1)$$

لاحظ أنه في جميع التعبيرات (٦٤ - ١) إلى (٦٧ - ١) فإن المقصود برقم الكـم m هو القيم المطلقة أي $|m|$. وحيث إن $|m|$ تأخذ القيم ٠ , ١ , ٢ , ٣ فـإن الكمية ($k + |m|$) تأخذ القيم الصحيحة الموجبـة ٠ , ١ , ٢ ...... أيـضا. وعلى ذلك فإنه يمكننا تعريف رقم الكم الجديد ℓ كالآتي :

$$\ell = k + |m| \qquad (68 - 1)$$

وتصبح القيم المميزة المتاحة لمربع قيمة عزم الحركة الزاوي هي :

$$C = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \quad ; \quad \ell = 0,1,2,..... \qquad (69 - 1)$$

ومن (٦٨ - ١) فإنه من الواضح أن $\ell \geq |m|$ وبالتالي فإن القيم الممكنـة لـرقم الكم m هي :

$$m = -\ell, -\ell + 1, -\ell + 2, ..., -1, 0, 1, ..., \ell - 2, \ell - 1, \ell \qquad (1 - 70)$$

وبأخذ الجذر التربيعي للتعبير (٦٩ - ١) فإن القيمة العددية لعزم الحركة الزاوي تصبح مساوية $[\ell(\ell + 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar$. وحيث إن $\ell \geq |m|$ فإن قيمـة عـزم الحركـة الزاوي تكون دائما وأبدا أكبر من قيمه مركبته في الاتجـاه z $(L_z = m\hbar)$.

ماعدا في حالة $\ell = ٠$ وفي هذه الحالـة فـإن $L^٢, L_z$ يـصبحان متـساويين ومساويين للصفر. وكذلك المركبتين L_x, L_y أي انه في حالة $\ell = ٠$ فقد أمكننا التعيين المتزامن لقيم عزم الحركة الزاوي ومركباته الثلاث.

ولنستكمل دراستنا في هذا الفصل بمحاولة التعرف على الـصورة النهائيـة والعامـة للدالـة المميـزة لعـزم الحركـة الـزاوي. ومـن المعـادلات (٦٣– ١)، , (٦٧ - ١) (٦٨ - ١) , (٦٠ - ١) (٦٥-١) فإن الجزء $S(\theta)$ مـن الدالة المميزة (٤٩ ١) يمكن كتابته بالصورة :

$$S_{\ell,m}(\theta) = \sin^{|m|}(\theta) \sum_{\substack{j=١,٣,... \\ or\ =٠،٢,...}}^{\ell-|m|} a_j \cos^j \theta \qquad (١ - ٧١)$$

حيث عملية الجمع تتحرك على القيم الفردية أو الزوجية للمعامل j اعتمادا على كون $\ell - |m|$ فرديا أو زوجيا.

وفي حالة $\ell = ٠$ فإن $m = ٠$ وتأخذ الدالة الشكل التالي :

$$S_{٠,٠}(\theta) = a_o \qquad (١ - ٧٢)$$

أما في حالة $\ell = ١$ فإن قيم m المتاحة هي ١- , ٠ , ١+ . وفي حالـة $|m| = \ell$ فإن :

$$S_{١,\pm١}(\theta) = a_o \sin\theta \qquad (١ - ٧٣)$$

وليس من الضروري أن تكون (a_o) في (٧٣- ١) هي (a_o) في (٧٢- ١).

مثال ١-٥:

أوجد قيم ثابت المعايرة a_o في الدالتين (٧٢ - ١) , (٧٣ - ١).

الحل :

بالنسبة للدالة (٧٢ - ١) فإن التكامل يكون على وحدة الحجوم التفاضلية للمتغيرθ فقط أي أن:

$$\int_{٠}^{\pi}\left|a_o^{٢}\right|\sin\theta d\theta=١$$

$$٢\left|a_o^{٢}\right|=١$$

$$\left|a_o\right|=\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

وبالنسبة للدالة (٧٣ - ١) فإن تكامل المعايرة هو :

$$\int_{٠}^{\pi}\left|a_o^{٢}\right|\sin^{٢}\theta\sin\theta d\theta=١$$

$$\left|a_o^{٢}\right|\int_{-١}^{+١}\left(١-\omega^{٢}\right)d\omega=١$$

$$\left|a_o\right|=\frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

وعموما فإن الجزء $S_{\ell,m}(\theta)$ من الدالة المميزة لمؤثرات عزم الحركة الزاوي يمكن كتابته بالصورة العامة :

$$S_{\ell,m}(\theta)=\left[\frac{(٢\ell+١)}{٢}.\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{\frac{١}{٢}}P_{\ell}^{|m|}\cos\theta \qquad (١ - ٧٤)$$

حيث $p_{\ell}^{|m|}$ هي كثيرة الحدود ويمكن تعريفها كالآتي :

$$p_\ell^{|m|}(\omega)=\left(١-\omega^{٢}\right)^{|m|/٢}\frac{d^{|m|}}{d\omega^{|m|}}p_\ell(\omega)\quad;\quad p_\ell^{\cdot}(\omega)=p_\ell(\omega)\qquad (١\text{-}٧٥)$$

حيث :

$$P_\ell(\omega)=\frac{١}{٢^\ell\,\ell!}\frac{d^\ell}{d\omega^\ell}\left(\omega^{٢}-١\right)^\ell\quad;\quad \ell=٠،١،٢,......\qquad (١ - ٧٦)$$

والدالة $S_{l,m}$ كما عرفناها في المعادلة (٧٤ - ١) هي داله معروفـة فـي علـم الرياضيات باسم دوال لاجندور المرافقة. ويمثل الحد الأول في (٧٤ - ١) ثابت المعايرة. ويوضح جدول رقم (١ - ١) الدوال $S_{\ell,m}$ لبعض قيم $\ell\, m$, .

والدوال المميزة لمؤثرات عزم الحركة الزاوي $\hat{L}^{٢},\hat{L}_Z$ تسمى الدوال التوافقيـة الكروية Spherical Harmonics ويمكن التعبير عنها بالصورة:

$$Y_\ell^m(\theta,\phi)=\left[\frac{(٢\ell+١)}{٤\pi}\cdot\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{\frac{١}{٢}}P_\ell^{|m|}\cos\theta e^{im\phi}\qquad (١ – ٧٧)$$

ونخلص من هذا الفصل بأن المعادلتين الأساسيتين (٤٦ - ١) ,(٤٧ - ١) واللتين تحددان الدوال والقيم المميزة لعزم الحركة الزاوي يمكن التعبير عنهما بالصورة العامة :

$$\hat{L}_z Y_\ell^m(\theta,\phi)=m\hbar\, Y_\ell^m(\theta,\phi)\qquad (١ - ٧٨)$$

حيث $m = -\ell\, ,\, -\ell+١\, ,\, ...\, -١,\, ٠\, ,\, ١\, ,\, ...\, \ell-١\, ,\, \ell$

$$\hat{L}^{٢}Y_\ell^m(\theta,\phi)=\ell(\ell+١)\hbar^{٢}Y_\ell^m(\theta,\phi)\qquad (١ - ٧٩)$$

حيث : $\ell = ٠\, ,\, ١\, ,\, ٢\, ,\, ...$

والدوال المميزة $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ تعطى بالتعبير (٧٧ - ١).

جدول (١ - ١): دوال لاجندور المرافقة $S_{\ell,m}(\theta)$

الدالة	أرقام الكم
$S_{٠,٠} = \frac{١}{٢}\sqrt{٢}$	$\ell = ٠$
$S_{١,٠} = \frac{١}{٢}\sqrt{٦}\cos\theta$	$\ell = ١$
$S_{١,\pm١} = \frac{١}{٢}\sqrt{٣}\sin\theta$	
$S_{٢,٠} = \frac{١}{٤}\sqrt{١٠}(٣\cos^{٢}\theta - ١)$	$\ell = ٢$
$S_{٢,\pm١} = \frac{١}{٢}\sqrt{١٥}\sin\theta\cos\theta$	
$S_{٢,\pm٢} = \frac{١}{٤}\sqrt{١٥}\sin^{٢}\theta$	
$S_{٣,٠} = \frac{٣}{٤}\sqrt{١٤}\left(\frac{٥}{٣}\cos^{٣}\theta - \cos\theta\right)$	$\ell = ٣$
$S_{٣,\pm١} = \frac{١}{٨}\sqrt{٤٢}\sin\theta(٥\cos^{٢}\theta - ١)$	
$S_{٣,\pm٢} = \frac{١}{٤}\sqrt{١٠٥}\sin^{٢}\theta\cos\theta$	
$S_{٣,\pm٣} = \frac{١}{٨}\sqrt{٧٠}\sin^{٣}\theta$	

١-٥ مؤثرات الرفع والخفض لعزم الحركة الزاوي

Raising and Lowering Operators for Angular Momentum

ونختتم هذا الباب بتقديم مؤثرين جديدين لعزم الحركة الزاوي وهما مؤثر الرفع $\hat{L}_+$ ومؤثر الخفض $\hat{L}_-$ وهذان المؤثران يطلق عليهما بصفة عامة مؤثرات السلّم Ladder operators . وسوف نتعرف على مصدر هذه التسمية في الفصل الحالي. ونعرف هذين المؤثرين كالآتي :

$$\hat{L}_+ \equiv \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad (١ - ٨٠)$$

$$\hat{L}_- \equiv \hat{L}_x - i\hat{L}_y \qquad (١ - ٨١)$$

ولندرس سويا بعض علاقات التبادل لهذين المؤثرين فأولا :

$$\begin{aligned}
\hat{L}_+\hat{L}_- &= \left(\hat{L}_x + i\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right) \\
&= \hat{L}_x\left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right) + i\hat{L}_y\left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right) \\
&= \hat{L}_x^٢ - i\hat{L}_x\hat{L}_y + i\hat{L}_y\hat{L}_x + \hat{L}_y^٢ \\
&= \hat{L}^٢ - \hat{L}_z^٢ + i\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right]
\end{aligned}$$

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}^٢ - \hat{L}_z^٢ + \hbar\hat{L}_z \qquad (١ - ٨٢)$$

وبالمثل فإن:

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^٢ - \hat{L}_z^٢ - \hbar\hat{L}_z \qquad (١ - ٨٣)$$

وبالنسبة لعلاقات التبادل مع $\hat{L}_z$ فإن :

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_+,\hat{L}_z\right] &= \left[\hat{L}_x + i\hat{L}_y,\hat{L}_z\right] \\
&= \left[\hat{L}_x,\hat{L}_z\right] + i\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right] \\
&= -i\hbar\hat{L}_y - \hbar\hat{L}_x = -\hbar\left(\hat{L}_x + i\hat{L}_y\right) \\
\left[\hat{L}_+,\hat{L}_z\right] &= -\hbar\hat{L}_+ \qquad (١ - ٨٤)
\end{aligned}$$

وهذا التعبير الأخير يمكن كتابته بصورة أكثر استخداما :

$$\begin{aligned}
\hat{L}_+\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_+ &= -\hbar\hat{L}_+ \\
\hat{L}_+\hat{L}_z &= \hat{L}_z\hat{L}_+ - \hbar\hat{L}_+
\end{aligned} \qquad (١ - ٨٥)$$

وبالمثل فإن علاقة التبادل بين $\hat{L}_z$ و $\hat{L}_-$ يمكن كتابتها بالصورة:

$$\hat{L}_-\hat{L}_z = \hat{L}_z\hat{L}_- + \hbar\hat{L}_- \qquad (١ - ٨٦)$$

والآن ولندرس تأثير $\hat{L}_+$ و $\hat{L}_-$ على معادلات القيم المميزة لكل من $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$ راجع المعادلات (٤٦ - ١) , (٤٧ - ١)

$$\hat{L}^2 Y = c\,Y \quad , \quad \hat{L}_z Y = b\,Y$$

ولنبدأ أولا بالمؤثر $\hat{L}_+$:

$$\hat{L}_z\,\hat{L}_+ Y = b\,\hat{L}_+ Y$$

وباستخدام المعادلة (٨٥ - ١)

$$(\hat{L}_z\hat{L}_+ - \hbar\hat{L}_+)Y = b\hat{L}_+Y$$

وحيث إن جميع المؤثرات الكمة هي مؤثرات خطية فإن:

$$\hat{L}_z\hat{L}_+Y = \hbar\hat{L}_+Y + b\hat{L}_+Y$$

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_+Y\right)=\left(b+\hbar\right)\left(\hat{L}_+Y\right) \qquad (١ - ٨٧)$$

وهذه المعادلة الأخيرة توضح أن الدالة $\hat{L}_+Y$ هي دالة مميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ ولهـا القيمة المميزة $(b+\hbar)$. أو بمعنى آخر أنه عند معاملتنا للدالة Y بالمؤثر $\hat{L}_z$ فإنها أنتجت دالة جديدة هي أيضا دالة مميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ بقيمـة مميـزة أكبـر بمقدار $\hbar$ من قيمة Y الأصلية. وبالتأثير على (٨٧ - ١) بالمؤثر $\hat{L}_+$ مرة أخرى فإننا نحصل على المعادلة :

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_+^{٢}Y\right)=\left(b+٢\hbar\right)\left(\hat{L}_+^{٢}Y\right) \qquad (١ - ٨٨)$$

وبالتأثير المتتالي بالمؤثر $\hat{L}_+$ عدد k مرة فإننا نحصل على المعادلة :

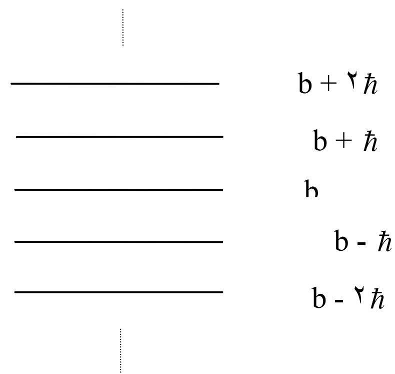
$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_+^{k}Y\right)=\left(b+k\hbar\right)\left(\hat{L}_+^{k}Y\right) \quad ; \quad k=٠,١,٢,... \quad (١- ٨٩)$$

ومن ناحية أخرى إذا أثرنا على معادلة القيمة المميزة بالمؤثر $\hat{L}_-$ فإننا يمكـن أن نحصل على معادلات مشابهة :

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_-Y\right)=\left(b-\hbar\right)\hat{L}_-Y \qquad (١ - ٩٠)$$

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_-^{k}Y\right)=\left(b-k\hbar\right)\left(\hat{L}_-^{k}Y\right) \quad ; \quad k=٠,١,٢,.... \quad (١ - ٩١)$$

مما سبق يتضح أن الاستخدام المتكرر لمؤثرات الرفع والخفـض علـى الدالـة المميزة Y و التي لها القيمة المميزة b فإننا نحصل على سلم Ladder من القيم المميزة حيث الفرق بين كل قيمة والتي تليها مباشرة هو فرق ثابت ويساوي $\hbar$ كما هو موضح في الشكل (١-٥).



شكل (١-٥) : سلم القيم المميزة الناتج من التأثير المتكرر بمؤثرات الرفع أو الخفض على الدوال التوافقية الكروية $Y(\theta, \phi)$.

تمـــــــارين :

١) أثبت علاقات التبادل في المعادلات من (٢ - ١) إلى (٨ - ١) .

٢) إذا كانت مركبات $\underline{A}$ هي (٦ , ٢- , ٣) ومركبات $\underline{B}$ هي (٤ , ٤ , ١-):

أوجد قيمة $A \times B , A.B , A - B , A + B , |B| , |A|$

أوجد الزاوية بين $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

٣) استخدم حاصل الضرب المتجه لإيجاد الزاوية المنفرجة بين قطري مكعب. ما هي الأهمية الكيميائية المرتبطة بهذه الزاوية؟

٤) استنبط العلاقة (٤٥ – ١) للمؤثر $\hat{L}^{٢}$ باستخدام العلاقات (٤٢ - ١) – (٤٤ -١).

٥) احسب الزوايا الممكنة بين L والمحور Z لقيمة $\ell = ٢$.

٦) أثبت أن علاقات التبادل الثلاث (٣٧ - ١) - (٣٩ - ١) تكافئ العلاقة :

$$\hat{L} \times \hat{L} = i\hbar\hat{L}$$

٧) أثر بالمؤثر $\hat{L}_{-}$ ثلاث مرات متتابعة على الدالة $Y_{١}^{١}(\theta,\phi)$ وأثبت أن ذلك يؤدي إلى دوال تتناسب مع الصفر و $Y_{١}^{-١}$ ، $Y_{١}^{٠}$.

٨) إن مؤثر الهملتونين للمهتز المتوافق هو :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_x^{٢}}{٢m} + ٢\pi^{٢}\nu^{٢}m\,\hat{x}^{٢}$$

ويمكن تعريف مؤثرات الرفع والخفض لهذه المسألة كالآتي :

$$\hat{A}_{+} \equiv \frac{١}{(٢m)^{\frac{١}{٢}}}\left[\hat{P}_x + ٢\pi i\nu\, m\,\hat{x}\right],$$

$$\hat{A}_{-} \equiv \frac{١}{(٢m)^{\frac{١}{٢}}}\left[\hat{P}_x - ٢\pi i\nu\, m\,\hat{x}\right]$$

أثبت أن :

$$\hat{A}_{+}\hat{A}_{-} = \hat{H} - \frac{١}{٢}h\nu \;;\; \hat{A}_{-}\hat{A}_{+} = \hat{H} + \frac{١}{٢}h\nu$$

$$\left[\hat{A}_{+}, \hat{A}_{-}\right] = -h\nu$$

$$\left[\hat{H}, \hat{A}_{+}\right] = h\nu\hat{A}_{+} \quad ; \quad \left[\hat{H}, \hat{A}_{-}\right] = -h\nu\hat{A}_{-}$$

أثبت أن $\hat{A}_{+}$ ، $\hat{A}_{-}$ بالفعل مؤثرات سلم تؤدي إلى مجموعة من القيم المميـزة تتباعد عن بعضها البعض بمقدار ثابت وهو hν . و حيث إن كلا مـن طاقـة الحركة وطاقة الوضع موجبة، فإن الطاقة الكلية لابد أيضا أن تكـون موجبـة، ولابد أن تكون هناك حالة مستقره أو حالة دنيا.

أثر على دالة هذه الحالة بالمؤثر $\hat{A}_{-}$ أولا ثم $\hat{A}_{+}$ وأثبت أن الطاقة الدنيا هـي ١/٢ hν . وأخيرا أثبت أن

$$E = (n+١/٢)\,h\nu \quad ; \quad n = ٠, ١, ٢ \ldots$$